鳥取大学教育地域科学部紀要　地域研究　第 1 巻　第 1 号（1999）

フレーゲの定理について

田　畑　博　敏*

キーワード：フレーゲの定理，フレーゲ算術，ヒュームの原理

はじめに

フレーゲは『算術の基礎』§68で有限基数（自然数）の明示的定義を与えた後，以下§83までの節において，算術の主要な定理を導いている。しかし，その導出の過程で実際に使われるのは，数の明示的定義（すなわち「概念Ｆの基数とは“Ｆと同数的である”という第２階概念の外延という対象である」という定義）ではなく，ヒュームの原理と呼ばれる数の同等性を示す一種の文脈原理である。数の明示的定義に含まれる概念の外延が数の同一性を同外延性によって規定する原理と結びつくとき，ラッセルのパラドクスのような矛盾が導かれる。従って，矛盾を避けるという観点からは，無矛盾性の保証された原理を用いることが望ましい。ブーロスは一連の論文(1)において，フレーゲが『基礎』において，ヒュームの原理という無矛盾な原理から（実質上ペアノ算術を含む）算術の諸定理を導くための十分なプログラムを与えていることを示している。そして，そのようなフレーゲの仕事は数学的にも意味があり，「フレーゲの定理」と呼ぶに相応しいものである，と主張している。本論文は，「フレーゲの定理」と言われるフレーゲの成果がどのようにして確立されるのか，その実際の論証の作業を通して，このブーロスの主張を確認することを目的とする。そこで，§１では，フレーゲの定理を証明する基礎となる形式的体系である「フレーゲ算術」をブーロスに従って構成して，この体系でのヒュームの原理の位置を定める。すなわち，ヒュームの原理の無矛盾性を確認する。§２で，『基礎』§74－§83の議論を再構成する形で，ヒュームの原理からペアノの第２公理を含むいくつかの算術の定理を実際に導く。

§１　フレーゲ算術の構成

まず，フレーゲの『算術の基礎』の中心的部分（すなわち§68－§83で素描される算術の展開のプログラム）を捉えるに十分な形式的体系を，ブーロスに拠って，「フレーゲ算術」（ＦＡ：Frege Arithmetic，以後ＦＡと呼ぶ））と名づけ，これを構成することから始める（ＦＡの構成の仕方はいくつかあるが，ここではBoolos［1987］のものに従う）。

ＦＡの基礎となる論理体系はペアノ－ラッセル式の論理記号で書かれる標準的な第２階論理である。ＦＡの変項は以下の３種類である：

(1)　第１階変項（対象を表示する変項）：a，b，c，d，m，n，x，y，z，…；

* 地域設計学講座・哲学

(2) 第2階の1項変項（概念を表示する変項）：F，G，H，…；
(3) 第2階の2項変項（2項関係を表示する変項）：ϕ，φ，…。

FAの言語の唯一の非論理的記号として，2座の述語記号“η”を導入する。これについては，

$$F \eta x$$

と書き，「概念Fが外延xに属する」と読む。つまりηは，概念変項と対象変項に適用することにより，真理値を生む述語記号である。これは，フレーゲの外延が対象であって，概念Fが，「概念Fと同数的である（gleichzahlig）」という高次概念の外延（つまり概念Fに属する数という対象）に対応している，というフレーゲの考えを反映させるための道具である。

FAの原子式は，

$$F x,$$
$$x \phi y,$$
$$F \eta x,$$

である。同一性には

$$x = y \quad \Leftrightarrow \quad \forall F \ (F x \longleftrightarrow F y)$$

という形で第2階の定義が与えられる。（フレーゲは『基礎』§65でライプニッツに言及している。）

FAの公理と推論規則は，通常の第2階論理の公理と推論規則である。特に，公理の中に，概念変項と関係変項に対する，以下の包括［内包］の公理（comprehension axiom）が含まれる：

(i) $\exists F \forall x \ (F x \longleftrightarrow A \ (x))$ （A（x）の中にFは自由には出現しない。）

(ii) $\exists \phi \forall x \forall y \ (x \phi y \longleftrightarrow B \ (x, y))$ （B（x, y）の中にϕは自由には出現しない。）

FAの唯一の非論理的公理[(2)]として，次の“Numbers（数）”を導入する：

Numbers：$\forall F \exists ! x \forall G \ (G \eta x \longleftrightarrow F \approx G)$.

ここで，“$F \approx G$”は，「FとGが同数的である（gleichzahlig）」ということを表現しており，第2階の論理式で書けば，

$$\exists \phi \ [\forall y \ (F y \rightarrow \exists ! z \ (y \phi z \wedge G z)) \wedge \forall z \ (G z \rightarrow \exists ! y \ (y \phi z \wedge F y))]$$

という式の略記表現である。フレーゲは『基礎』§68で，概念Fに属する［に対応する］数を，〈Fと同数的である〉という第2階概念の外延と定義した。当然，フレーゲは，〈Fと同数的である〉という概念の外延の存在を前提している。公理Numbersはこの前提を表現している。

しかし，フレーゲが§74以下で素描する算術の展開において，彼が実際に用いるのは，公理：Numbersから導かれ，かつ数の定義に明からさまには言及しない文脈原理である，次のヒュームの原理である（この名称は，フレーゲが§63でヒュームを引用しているゆえに，ブーロスが提案している名称である）：

ヒュームの原理：　$\# F = \# G \longleftrightarrow F \approx G$.

ここで，“#”は概念変項に付されたとき対象項を作る関数記号であり，“#F”は「概念Fに属する数」と読む。“#”という関数記号の導入により，FAはここで定義による拡大がなされる。このヒュームの原理は，概念Fに属する数と概念Gに属する数とが同一であることの基準がFとGとの同数性である，ということを主張する。この原理は，高次概念の外延という数の明示的定義に直接に関与してはいない。ヒュームの原理は数の存在を暗黙に前提してはいるが，数とはそもそも何であるかという問いに直接答えることはなく，数の同一性の基準を与えているにすぎない。その意味で，ヒュームの原理は数の明示的定義ではなく，文脈的・間接的な定義にすぎない。

このヒュームの原理が充足可能であり，よって無矛盾である，ということをブーロスは示してい

る。それは，ヒュームの原理を充足するモデルMを構成することによってなされる(3)。Mの領域Uを

$$U = \{ 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, \aleph_0 \}$$

とする。そして，概念変項の変域を $\{X : X \subseteq U\}$，すなわちUの巾集合とし，関係変項の変域を $\{X : X \subseteq U \times U\}$，すなわち$U^2$の巾集合とする。Uは，Uのすべての部分集合の基数を再び自らの要素とする，という重要な性質を持っている（自然数全体の集合：❈＝{0，1，2，3，…}はこの性質を欠いている)。モデルMで，関数記号“#”は，Uの任意の部分集合Vに対する値としてVの基数（つまりVの要素の個数）を与える関数ｆとして解釈する。

このモデルMでの，変項への値の割り当て関数ｓを定める（ｓは対象変項にUの要素を，概念変項にUの巾集合の要素を，関係変項にU^2の巾集合の要素を，各々割り当てる)。

さてこのとき，ヒュームの原理がMにおけるｓで充足可能となることは，次のようにして示される。Mの定義により，#F＝#Gがｓで充足されるのは，ｓ(F)の基数とｓ(G)の基数とが同一であるとき，かつそのときにかぎる：

s(#F＝#G)＝T　⇔　s(F)の基数＝s(G)の基数　……①。

また，F≈Gがｓで充足されるのは，ｓ(F)とｓ(G)が１対１に対応させられるとき，かつそのときにかぎる：

s(F≈G)＝T　⇔　s(F)とs(G)とが１対１に対応させられる　……②

ところで，ｓ(F)の基数とｓ(G)の基数が同一であるのは，ｓ(F)とｓ(G)が１対１に対応させられるとき，かつそのときにかぎる：

s(F)の基数＝s(G)の基数　⇔　s(F)とs(G)が１対１に対応させられる　……③

①，②，③より，s(#F＝#G)＝T　⇔　s(F≈G)＝T　であるから，

s(#F＝#G ⟷ F≈G)＝T

が成り立つ。すなわち，すべての割り当てｓがMでヒュームの原理を充足する。よって，Mはヒュームの原理のモデルとなる。

同様の議論により，公理Numbersの充足可能性も示すことができる。Mの領域を先と同じ$U = \{0, 1, 2, \cdots, \aleph_0\}$と取り，$V \subseteq U$，$u \in U$に対して，

$$V \eta u \Leftrightarrow V\text{の基数} = u$$

とするとき，NumbersはMで真となる。

さて，このNumbersはMで真となったから無矛盾である。この無矛盾な公理Numbersからヒュームの原理が導かれる。Numbersが主張することは，任意の第１階概念Fに対して，（F≈Fからηにより，Fηxという形で得られる）唯一の数（Fに属する数）ｘが得られる，ということである。そこで，Fに属する数#Fを，

$$\#F = x \longleftrightarrow \forall H\ (H \eta x \longleftrightarrow H \approx F) \quad \cdots\cdots (※)$$

と定義する。これは，NumbersがFηxという形で保証するFの基数と#Fを繋ぐ役割を果たす。この定義を介して，ヒュームの原理はFAで証明できる(4)。

フレーゲは『算術の基礎』§73で，ヒュームの原理を証明しようとしている。その際に，フレーゲは，

“概念［H：F≈H］の外延＝概念［H：G≈H］の外延”

と，

“∀H（H≈F ⟷ H≈G）”

を自由に行き来できるかのように考えていると思われる。フレーゲがそのように考えた理由は，ヒュームの原理を支える根本原理が，『算術の基本法則』の悪名高い公理（V）のヴァージョンである，次の原理であると見做したからであろう：

任意の第２階概念Ｃ，Ｄに対して，

Ｃの外延＝Ｄの外延 $\longleftrightarrow$ ［すべての第１階概念Ｈについて，ＣＨ $\longleftrightarrow$ ＤＨ］。

実際，フレーゲが概念Ｆの基数を，Ｆと同数的であるという第２階概念の外延という形で明示的に定義するかぎり，このような原理を基本にせざるを得ない。しかし，ブーロスが指摘するように，Numbersと違い，この原理からは矛盾が導かれる(5)。従って，無矛盾なNumbersからヒュームのの原理が導かれるということは，大きな意義があることになる。

ところで，一見した所，単純な原理に見えるヒュームの原理から多くの算術の定理が導けるということは驚くべきことである。言い換えると，ヒュームの原理は無矛盾であるが，見かけほど弱くはない。実際，ヒュームの原理からNumbersを導くことができる(6)。

しかし，ともかく，無矛盾で，しかも単純に見えるヒュームの原理（またはNumbers）から多くの算術の定理を導くことができること，このことをフレーゲが実際に示していることは特筆に値すると言える。ブーロスはこのことを「フレーゲの定理」と名づけ，フレーゲのこの「数学的」業績をツェルメロの仕事に比肩するものと見做している。われわれは，次の節でヒュームの原理から多数の算術の定理，特にペアノの第２公理（すべての自然数には後者である自然数が存在する）がフレーゲ流のやり方で証明されることを確認することにしよう。

§２　ペアノの第２公理の導出

さて，これからブーロスに従い(7)，『算術の基礎』の線に沿って，ヒュームの原理から自然数に関する諸定理，特にペアノの第２公理として知られる「すべての自然数（有限基数）にはその後者（successor）である自然数が存在する」を導出する。

ヒュームの原理（ＨＰ：Hume's Principle）：$\# F = \# G \longleftrightarrow F \approx G$.

定義１（０(ゼロ)の定義）：$0 = \# [x : x \neq x]$.

フレーゲは，いかなる対象もそれに帰属しないこと（つまり矛盾していること）が「概念の鋭利な境界づけ」の観点から自明であるような概念として，「それ自身と同一でない」という概念を採用し，この概念に属する［対応する］数として０（ゼロ）を定義する（『基礎』§74)。

定理１：$\# F = 0 \longleftrightarrow \forall x \neg F x$.

『基礎』§75でフレーゲは，いかなる対象も帰属しない（任意の）概念に属する数はゼロであり，逆にゼロが属する概念にはいかなる対象も帰属しない，と述べている。

《証明》

(ｉ) $\# F = 0$　と仮定する。ゼロの定義（定義１）より，$\# F = \# [x : x \neq x]$。ヒュームの原理により，$F \approx [x : x \neq x]$。ところで，$\forall x \neg (x \neq x)$，つまり概念 $[x : x \neq x]$ は空である。$F \approx [x : x \neq x]$ より，Ｆも空でなければならない。よって，$\forall x \neg F x$。以上より，$\# F = 0 \rightarrow \forall x \neg F x$　が成り立つ……①。

(ii) 逆に，$\forall x \neg F x$　と仮定する。論理法則　$x = x$，$x = x \rightarrow (x \neq x \rightarrow F x)$ より，$x \neq x \rightarrow F x$ ……②。論理法則　$\neg F x \rightarrow (F x \rightarrow x \neq x)$ と $\neg F x$（仮定より）から，$F x \rightarrow x \neq x$ ……③。②，③より　$\forall x\ (F x \longleftrightarrow x \neq x)$。一般に，$\forall x\ (P x \longleftrightarrow Q x) \rightarrow P \approx Q$　が成

り立つから，$F \approx [x : x \neq x]$。HP（ヒュームの原理）により，$\# F = \# [x : x \neq x]$。ゼロの定義：$0 = \# [x : x \neq x]$ により，$\# F = 0$。以上より，$\forall x \neg F x \rightarrow \# F = 0$ ……④が成り立つ。①，④より，$\# F = 0 \longleftrightarrow \forall x \neg F x$。Q．E．D．

定義2（前者［言い換えると後者］関係の定義）：

$$mPn \;\Leftrightarrow\; \exists F \exists y \, (Fy \wedge \# F = n \wedge \# [x : Fx \wedge x \neq y] = m).$$

フレーゲは『基礎』§76で，自然数mが自然数nの前者である（言い換えると，自然数nが自然数mの後者である（mの直後に続く））という前者（または後者）関係を，「概念Fに属する数がnであり，“概念Fに帰属するがyと同一ではない”という概念に属する数がmであるような，概念Fとそれに帰属する対象yが存在する」と定義している。

定理2：$mPn \wedge m'Pn' \rightarrow (m = m' \longleftrightarrow n = n')$.

この定理は，前者関係が1対1対応関係であることを示している。

《証明》

mPn，$m'Pn'$ と仮定する。これらの仮定と前者関係Pの定義（定義2）より，F，yおよびF′，y′を，各々，mPn，$m'Pn'$ に対応する概念と対象の組とする。すなわち，

$$Fy \wedge \# F = n \wedge \# [x : Fx \wedge x \neq y] = m,$$

および　$F'y' \wedge \# F' = n' \wedge \# [x' : F'x' \wedge x' \neq y'] = m'$ ……①とする。

(i) $m = m'$ と仮定する。すると①より，$\# [x : Fx \wedge x \neq y] = \# [x' : F'x' \wedge x' \neq y']$。よって，HPにより，ある1対1写像$\phi$が存在して，これにより，$[x : Fx \wedge x \neq y] \approx [x' : F'x' \wedge x' \neq y']$。$Fy$，$F'y'$ であるから，ϕから作られる1対1写像 $\phi \cup \{\langle y, y' \rangle\}$ によって，$F \approx F'$ が示される。これとHPと①より，$n = \# F = \# F' = n'$，つまり $n = n'$。以上より，$m = m' \rightarrow n = n'$ が示された。

(ii) 逆に，$n = n'$ と仮定する。すると，①より $\# F = \# F'$ だから，HPにより，ある1対1写像ϕによって　$F \approx F'$ である。よって，$F'y'$ であるy'に対して唯一のFxなるxが対応して，$x \phi y'$。またFyであるyに対して唯一の$F'x'$なるx'が対応して，$y \phi x'$ である。そこで，

$$\phi = ((\phi - \{\langle x, y' \rangle \; \langle y, x' \rangle\}) \cup \{\langle x, x' \rangle\}) - \{\langle y, y' \rangle\}$$

とおくと，このϕにより，$[x : Fx \wedge x \neq y] \approx [x' : F'x' \wedge x' \neq y']$ が成り立つ。HPにより，$\# [x : Fx \wedge x \neq y] = \# [x' : F'x' \wedge x' \neq y']$。よって，①より，$m = m'$ となる[8]。こうして，(i)，(ii)より　$m = m' \longleftrightarrow n = n'$。Q．E．D．

定理3（ゼロはいかなる自然数の後者でもない）：　$\neg mP0$.

『基礎』§78で，フレーゲは，前者関係の定義から導かれる第6番目の命題として，「0以外のすべての自然数が自然数の系列中である自然数の後者となる」を挙げ，0がいかなる自然数の後者でもないことを暗示しているように見えるが，ブーロスはこれを否定している[9]。

《証明》

背理法による。$mP0$　と仮定する。前者関係「P」の定義により，ある概念Fと対象yに対して，Fy，$\# F = 0$，$\# [x : Fx \wedge x \neq y] = m$　……①。ところが，定理1より，$\# F = 0 \longleftrightarrow \forall x \neg F x$，ゆえに，$\forall x \neg F x$，よって$\neg F y$，これは①の$Fy$と矛盾する。よって，$\neg mP0$ でなければならない。Q．E．D．

定義3（一般系列関係の定義）：

$$xR^{*}y \;\Leftrightarrow\; \forall F \, [\forall a \forall b \, \{(a = x \vee Fa) \wedge aRb \rightarrow Fb\} \rightarrow Fy]$$

この定義の意味は，Rを親子，R*を先祖のモデルで考えると，xがyの先祖であるのは，xのす

べての子が有しかつ親から子へ遺伝するような任意の性質を y が持っているとき，かつそのときにかぎる，ということである。

ここで，以後の証明を実行するのに都合の良い証明法を確認しておく[10]：

> （★）“$xR^{*}y \to \cdots y \cdots$”という形の定理を証明するには，$F=[z:\cdots z\cdots]$ とおき，任意の対象 a，b に対して，$(a=x \vee Fa)$ かつ aRb と仮定して，Fb を導けばよい。

その理由はこうである。$xR^{*}y \to \cdots y \cdots$ を示さねばならないから，まず，$xR^{*}y$ と仮定することになる。つまり，$\forall a \forall b\ \{(a=x \vee Fa) \wedge aRb \to Fb\}$ という条件（※）を満たすFを取ると，そのFでは Fy が成り立つ，ということが仮定されている。そこで，$F=[z:\cdots z\cdots]$ とおいたとき，このFが先の条件（※）を満たすことが示されるならば，このFについて Fy が成り立つのだから，$\cdots y\cdots$ が導かれることになるからである。以後，このやり方を証明法（★）として引用する。また，一般系列 R^{*} を前者Pを基礎にした自然数系列 P^{*} に限定した場合にも，この証明法を用いる。

定理4：$xRy \to xR^{*}y$

この定理の意味は，「親子」は「先祖」の特殊例である，ということであり，フレーゲは『概念記法』第3部で命題91として述べている。

《証明》

xRy と仮定する……①。示すべきことは，$xR^{*}y$ であるから，R^{*} の定義（定義3）により任意のFについて　$\forall a \forall b\ \{(a=x \vee Fa) \wedge aRb \to Fb\}$ と仮定して，Fy を導けばよい。そこで，$\forall a \forall b\ \{(a=x \vee Fa) \wedge aRb \to Fb\}$ と仮定する……②。ここで，$a=x$，$b=y$ とおいて②に全称例化を施すと，$(x=x \vee Fx) \wedge xRy \to Fy$。論理法則 $x=x$ と，①より xRy だから，$(x=x \vee Fx) \wedge xRy$ が成り立つから，Fy。Q. E. D.

定理5（R^{*}の推移性）：$xR^{*}y \wedge yR^{*}z \to xR^{*}z$.

この定理も『概念記法』で命題98として述べられている。

《証明》

$xR^{*}y$……①，$yR^{*}z$……②，さらに　$\forall a \forall b\ \{(a=x \vee Fa) \wedge aRb \to Fb\}$…③と仮定して，$Fz$ を導けばよい。ところで，②で $yR^{*}z$ だから，$\forall a \forall b\ \{(a=y \vee Fa) \wedge aRb \to Fb)$ を示せば十分である。なぜなら，それから Fz が導かれるからである。そこで，任意の a，b に対して，$(a=y \vee Fa) \wedge aRb$　と仮定する……④。示すべきことは　Fb である。①より，$xR^{*}y$ だから，$\forall a \forall b\ \{(a=x \vee Fa) \wedge aRb \to Fb\} \to Fy$……⑤。③と⑤より，$Fy$ が導かれる。④より，$a=y \vee Fa$ だから，Fa が導かれる。ゆえに，$a=x \vee Fa$ さらに④より aRb だから，$(a=x \vee Fa) \wedge aRb$。これと③より，Fb。Q. E. D.

定理6：$xP^{*}n \to \exists m\, mPn \wedge \forall m\ [mPn \to (xP^{*}m \vee x=m)]$.

この定理の意味は「nがxで始まる自然数系列に属するならば，nの前者が存在し，かつnのいかなる前者もxで始まる自然数系列に属するかまたはxそのものである」というものである。

《証明》

P^{*} は R^{*} の特殊例とみなすことができるから，証明法（★）を用いるために，$F=[z:\exists m\, mPz \wedge \forall m\ (mPz \to [xP^{*}m \vee x=m])]$……①，とおく。そして，$xP^{*}n$ を仮定する。任意の a，b に対して，$(a=x \vee Fa) \wedge aPb$……②，と仮定して，この仮定の下で Fb を導

けば十分である。②で a P b だから，$\exists m$ m P b ……③。いま，任意の m について　m P b と仮定する……④。これと，定理 2 と②の a P b より，m = a ……⑤。②の仮定により，場合に分ける。

(i) a = x のとき，⑤より x = m。∴ x P*m ∨ x = m。④の仮定より，$\forall m$ (m P b → [x P* m ∨ x = m]) ……⑥　が示された。

(ii) F a のとき。①の仮定の前半より，ある m′ に対して，m′ P a。∴後半から x P*m′ ∨ x = m′。m′ P a と⑤の m = a より，m′ P m。もし x P*m′ ならば，定理 4 より m′ P*m だから，定理 5 より　x P*m。もし x = m′ ならば，x P m，定理 4 より x P*m。いずれにしろ　x P*m。よって，x P*m ∨ x = m。④の仮定より，$\forall m$ (m P b → [x P*m ∨ x = m]) ……⑦　が示された。

③，⑥，⑦により，$\exists m$ m P b ∧ $\forall m$ (m P b → [x P*m ∨ x = m])，すなわち　F b　が導けた。Q. E. D.

定理 7：0 P* n → ¬ n P* n.

「0 で始まる自然数系列に属する任意の自然数は自分自身の後続者ではない」というのが定理の意味である。フレーゲは『基礎』§83で，この定理を述べている。

《証明》

証明法（★）を用いるために，F = [z : ¬ z P* z] ……①　とおく。さらに，任意の a，b に対して，(a = 0 ∨ F a) ∧ a P b ……②　と仮定する。示すべきことは　F b，すなわち¬ b P* b である。いま仮に b P* b とおく。定理 6 より，$\forall m$ (m P b → [b P*m ∨ b = m]) だから，②の a P b により，b P* a ∨ b = a。場合に分けて，b P* a のとき，定理 4 より a P* b　だから，定理 5 より，a P* a。b = a のとき，a P a と定理 4 より，a P* a。いずれにせよ a P* a。つまり，¬ F a であるから，②の a = 0 ∨ F a より，a = 0。∴ 0 P* 0。定理 6 より，$\exists m$ m P 0。これは定理 3 に矛盾する。よって，¬ b P* b でなければならない。こうして，F b であることが示された。Q. E. D.

定義 4（大小関係の定義）：　m ≦ n　⇔　m P* n ∨ m = n.

定義 5（有限数の定義）：　n が有限である　⇔　0 ≦ n.

定理 8：m P n ∧ 0 P* n → $\forall x$ (x ≦ m ⟷ x ≦ n ∧ x ≠ n).

定理の意味は「m が，0 で始まる自然数系列に属する n の前者であれば，m 以下であるすべての自然数は n より真に小であり逆も成り立つ」というものである。

《証明》

m P n ……①，0 P* n ……②　と仮定する。もし x ≦ m，すなわち x P*m ∨ x = m ならば，①と定理 4 により m P* n だから，定理 5 により x P* n。∴ x P* n ∨ x = n，定義 4 により，x ≦ n ……③。いま仮に　x = n とすると，n P* n。しかし，②と定理 7 より¬ n P* n，よって矛盾。ゆえに　x ≠ n ……④。よって，③，④より x ≦ n ∧ x ≠ n。以上より，x ≦ m → x ≦ n ∧ x ≠ n。逆に，x ≦ n ∧ x ≠ n とする。定義 4 より，x P* n ∨ x = n，しかし x ≠ n だから，x P* n。よって，定理 6 より，m P n → x P*m ∨ x = m。これと①より，x P*m ∨ x = m。よって定義 4 により，x ≦ m。以上より，x ≦ n ∧ x ≠ n → x ≦ m。Q. E. D.

定理 9：m P n ∧ 0 P* n → # [x : x ≦ m] P # [x : x ≦ n]

定理の意味は「0 で始まる自然数系列に属する n が m の後者であるならば，n 以下であるという概念に属する数は m 以下であるという概念に属する数の後者となる」というものである。

《証明》

$mPn \land 0P^*n$……① と仮定する。定理8より，$\forall x\,(x \leqq m \longleftrightarrow x \leqq n \land x \neq n)$ だから，$[x : x \leqq m] \approx [x : x \leqq n \land x \neq n]$。HP（ヒュームの原理）より，$\#[x : x \leqq m] = \#[x : x \leqq n \land x \neq n]$。$F = [x : x \leqq n]$ とおくと，$n \leqq n$ だから，Fn。ところで，$[x : x \leqq n \land x \neq n] \approx [x : Fx \land x \neq n]$ だから，HPにより，$\#[x : x \leqq n \land x \neq n] = \#[x : Fx \land x \neq n]$。よって，$Fn \land \#F = \#[x : x \leqq n] \land \#[x : Fx \land x \neq n] = \#[x : x \leqq m]$。よって，定義2より，$\#[x : x \leqq m]\,P\,\#[x : x \leqq n]$。以上より，$mPn \land 0P^*n \rightarrow \#[x : x \leqq m]\,P\,\#[x : x \leqq n]$。Q. E. D.

以上の定理8と定理9は，フレーゲが『基礎』§82で明示的に述べている次の定理（定理10）の準備となるものである。

定理10：$mPn \rightarrow (0 \leqq m \land mP\#[x : x \leqq m] \rightarrow 0 \leqq n \land nP\#[x : x \leqq n])$

《証明》

mPn……①，$0 \leqq m \land mP\#[x : x \leqq m]$……② と仮定する。②の $0 \leqq m$ と定義4より $0P^*m \lor 0 = m$ である。$0P^*m$ のとき，①と定理4により mP^*n，よって定理5により，$0P^*n$，$\therefore 0P^*n \lor 0 = n$，すなわち $0 \leqq n$。$0 = m$ のとき，①より $0Pn$，よって定理4より $0P^*n$，$\therefore 0 \leqq n$。いずれにせよ，$0 \leqq n$……③。②で $mP\#[x : x \leqq m]$ だから，①と定理2により，$n = \#[x : x \leqq m]$。①の mPn と上の $0P^*n$ と定理9により，$\#[x : x \leqq m]\,P\,\#[x : x \leqq n]$，ゆえに $nP\#[x : x \leqq n]$。よって，③より $0 \leqq n \land nP\#[x : x \leqq n]$。以上より，

$mPn \rightarrow (0 \leqq m \land mP\#[x : x \leqq m] \rightarrow 0 \leqq n \land nP\#[x : x \leqq n])$。Q. E. D.

定理11：$0P\#[x : x \leqq 0]$.　（『基礎』§82）

《証明》

$F = [x : x \leqq 0]$ とおくと，$0 \leqq 0$ だから，$F0$……①。また，$\#F = \#[x : x \leqq 0]$…②。いま仮に，xP^*0 とすると，定理6の前半より，$\exists m\, mP0$ となり，定理3と矛盾する。よって，$\neg xP^*0$……③。定義4より，$x \leqq 0 \longleftrightarrow xP^*0 \lor x = 0$。ゆえに，$x \leqq 0 \land x \neq 0 \longleftrightarrow xP^*0 \land x \neq 0$……④。③より，$\neg xP^*0 \lor x = 0$ だから，$\neg(xP^*0 \land x \neq 0)$。よって，④より $\neg(x \leqq 0 \land x \neq 0)$，$\therefore \neg(Fx \land x \neq 0)$，$\therefore \forall x \neg(Fx \land x \neq 0)$。ところで，定理1より，$\#[x : Fx \land x \neq 0] = 0 \longleftrightarrow \forall x \neg(Fx \land x \neq 0)$ だから，$\#[x : Fx \land x \neq 0] = 0$……⑤。①，②，⑤より，$F0 \land \#F = \#[x : x \leqq 0] \land \#[x : Fx \land x \neq 0] = 0$，ゆえに，$\exists F \exists y\,[Fy \land \#F = \#[x : x \leqq 0] \land \#[x : Fx \land x \neq y] = 0]$。よって，定義2より，$0P\#[x : x \leqq 0]$。Q. E. D.

定理12：$0 \leqq n \rightarrow 0 \leqq n \land nP\#[x : x \leqq n]$.

《証明》

$0 \leqq n$……① と仮定する。①と定義4より，$0P^*n \lor 0 = n$。（i）$0 = n$ のとき，定理11より，$nP\#[x : x \leqq n]$ が成り立つ。（ii）$0P^*n$ のとき。証明法（★）を用いるため，$F = [z : 0 \leqq z \land zP\#[x : x \leqq z]]$ とおく。$\forall a \forall b\,[(a = 0 \lor Fa) \land aPb \rightarrow Fb]$ を示す。そこで，$(a = 0 \lor Fa) \land aPb$……②とおいて，$Fb$ を示せばよい。$a = 0$ のとき，$0 \leqq 0$ より $0 \leqq a$。また定理11より，$aP\#[x : x \leqq a]$。よって，$0 \leqq a \land aP\#[x : x \leqq a]$，つまり Fa。いずれにせよ Fa……③。定理10より，$aPb \rightarrow (Fa \rightarrow Fb)$。よって，②の aPb と③の Fa より，Fb。Q. E. D.

定理13：ｎが有限である→ｎＰ＃［ｘ：ｘ≦ｎ］.

《証明》

ｎが有限であるとすると，定義５より，０≦ｎ。定理12より，０≦ｎ→ｎＰ＃［ｘ：ｘ≦ｎ］であるから，ｎＰ＃［ｘ：ｘ≦ｎ］が導ける。Q．E．D.

定理13の意味は「ｎが有限ならば，〈ｎ以下の数である〉という概念に属する数がｎの後者となる」である。従って，任意の自然数（有限基数）には後者である自然数が存在することが示された。

こうして，『概念記法』の第２階論理の体系で数学的帰納法が導かれる（『概念記法』第３部命題81）から，『基礎』において，フレーゲは実質的にペアノの公理系を導出している。

註

(1) Boolos［1986－7］［1987］［1990］［1995］［1996］参照。また野本［1999］はこの主題をはじめとする，フレーゲの数学の哲学に関連した最近の動きに見通しを与える有益なサーヴェイである。

(2) Numbersという公理を「非論理的」とする断言はブーロスによる（Boolos［1987］186頁)。（尚，ブーロスの引用の頁づけはBoolos［1998］のテキストによる。以下同様。）フレーゲが外延を論理的な対象と見做すことから推測すれば，彼はこの公理を「論理的」と考える可能性がある。

(3) Boolos［1987］p.187 f.

(4) 定義（※）を介して，ヒュームの原理：＃Ｆ＝＃Ｇ⟷Ｆ≈Ｇ　は以下のように証明される。

(→：）＃Ｆ＝＃Ｇ　と仮定する。＃Ｆ＝ｘ⟷＃Ｆ＝ｘより，＃Ｆ＝ｘ⟷＃Ｇ＝ｘ　であるから，定義（※）により，

$\forall H\ (H\eta x \leftrightarrow H \approx F) \leftrightarrow \forall H\ (H\eta x \leftrightarrow H \approx G)$ ……①

ところで，定義（※）と＃Ｆ＝＃Ｆより，

$\forall H\ (H\eta \# F \leftrightarrow H \approx F)$ ……②

①，②より

$\forall H\ (H\eta \# F \leftrightarrow H \approx G)$ ……③

ここで，Ｆ≈Ｆだから，②により，Ｆη＃Ｆ。③より，Ｆη＃Ｆ→Ｆ≈Ｇ。∴Ｆ≈Ｇ。

以上より，

$\# F = \# G \rightarrow F \approx G$。

(←：）Ｆ≈Ｇ　と仮定する。すると，任意のＨに対して，Ｈ≈Ｆ⟷Ｈ≈Ｇ。ゆえに，

$\forall H\ (H\eta x \leftrightarrow H \approx F) \leftrightarrow \forall H\ (H\eta x \leftrightarrow H \approx G)$。

定義（※）より，

$\# F = x \leftrightarrow \forall H\ (H\eta x \leftrightarrow H \approx F)$

$\# G = x \leftrightarrow \forall H\ (H\eta x \leftrightarrow H \approx G)$

これらより，＃Ｆ＝ｘ⟷＃Ｇ＝ｘ　が出る。ところが，＃Ｇ＝＃Ｇ。∴＃Ｆ＝＃Ｇ。

以上より，

$F \approx G \rightarrow \# F = \# G$。　Q．E．D.

(5) ブーロスはBoolos［1986－7］173頁で以下のようにして，この原理からも矛盾が出ることを示している。ηを次のように定義する。Ｆηｘ⟷ある第二階概念Ｄに対して，ｘ＝Ｄ*かつ

DＦ。ここで，D*は「Dの外延」を意味する。一段階上の包括公理により，C＝［F：∃x（¬Fηx∧Fx）］とおく。最低階の包括公理により，X＝［x：x＝C*］とする。いま，XηC*と仮定せよ。すると，ηの定義により，ある二階概念Dに対して，C*＝D*かつDX。これより，問題の原理により，CX。ところが，Cの定義により，∃x（¬Xηx∧Xx）。よって，あるxにつき，¬Xηx∧Xx。XxとXの定義により，x＝C*。ゆえに¬XηC*，∴矛盾。そこで，¬XηC*とする。ηの定義より，¬∃D（C*＝D*∧DX）。ゆえに，∀D（C*＝D*→¬DX），よって，C*＝C*→¬CX，ゆえに，¬CX。しかし，Cの定義より，¬∃x（¬Xηx∧Xx），よって，∀x（Xx→Xηx）。ゆえにXC*→XηC*。ところが，C*＝C*とXの定義より，XC*。ゆえに，XηC*となり矛盾である。

(6) Fηx ⟷ x＝＃Fとおくと，ヒュームの原理：＃F＝＃G ⟷ F≈G　から，Numbers：∀F∃！x∀H（Hηx ⟷ H≈F）は以下のようにして導かれる。任意のFを取る。このとき，∀H（Hηx ⟷ H≈F）となるxが唯一つ存在することを示さねばならない。いま，任意のHを取ると，ヒュームの原理より，＃H＝＃F ⟷ H≈F。すなわち，∀H（＃H＝＃F ⟷ H≈F），∴∃x∀H（＃H＝x ⟷ H≈F）。xの唯一性は次のようにして分かる。
∀H（＃H＝x_1 ⟷ H≈F），∀H（＃H＝x_2 ⟷ H≈F）とおく。F≈Fだから，＃F＝x_1，＃F＝x_2，∴x_1＝x_2。∴∃！x∀H（＃H＝x ⟷ H≈F）。“η”の上の定義により，∃！x∀H（Hηx ⟷ H≈F）。よって，∀F∃！x∀H（Hηx ⟷ H≈F）。Q．E．D．

(7) この節はBoolos［1990］Appendix, pp.217－219に負っている。

(8) x＝y，x′＝y′のときは，〈x，y′〉＝〈y，x′〉＝〈x，x′〉だから，(φ－｛〈x，y′〉〈y，x′〉｝)∪｛〈x，x′〉｝＝φとなり，φの最後の項：－｛〈y，y′〉｝によって，φからφへの制限が実現する。

(9) 『算術の基本法則』§44は，フレーゲが『基礎』§78の第6命題に“∀m¬mP0”を含意させようという意図の無かったことを明らかにしている，とブーロスは指摘している。Boolos［1996］282頁参照。

(10) Boolos［1990］p.217.

参考文献

Boolos, G. [1986－7]：“Saving Frege from contradiction”, *Proceedings of the Aristotelian Society, 87*, pp.137－151. Demopoulos [1995] および Boolos [1998] に再録。

Boolos, G. [1987]：“The consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*”, in J. J. Thomson (ed.), *On Being and Saying：Essays for Richard Cartwright*, pp.3－20. Demopoulos [1995] および Boolos [1998] に再録。

Boolos, G. [1990]：“The standard of equality of numbers”, in Boolos [1990a], pp.261－277. Demopoulos [1995] および Boolos [1998] に再録。

Boolos, G. (ed.) [1990a]：*Meaning and Method：Essays in Honor of Hilary Putnum*, Cambridge U. P.

Boolos, G. [1995]：“Frege's theorem and the Peano postulates”, *Bulletin of Symbolic Logic*, 1, pp.317－326. Boolos [1998] に再録。

Boolos, G. [1996]：“On the proof of Frege's theorem”, in A. Morton and S. P. Stich (eds.), *Benacerraf and his critics*, Blackwell, Boolos [1998] に再録。

BooLos, G. [1998]：*Logic, Logic, and Logic*, Harvard U. P.

Demopoulos, W. (ed.) [1995] : *Frege's Philosophy of Mathematics*, Harvard U.P.

Frege, G. [1884] : *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung uber den Begriff der Zahl*, Wilhelm Koebner.

野本和幸 [1999] ："G. フレーゲ『算術の基本法則』における論理と数学の哲学", 東京都立大学人文学報, 第295号, 1 −96頁。

(1999年 6 月10日受理)